Cours du 19.04.2021 APRES-MIDI

lundi, 19 avril 2021 13:04

$$A_{3\times 3}\ \vec{x}_{3\times 1} = \vec{b}_{3\times 1} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_1 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Si A^{-1} (l'inverse de A) $\underline{\underline{\text{existe}}}$ alors

1) $A^{-1} \cdot A = I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (él. neutre de la mult. matricelle)

2) $A \cdot A^{-1} = I_{3\times 3}$

$I_{n\times n}\vec{x}_{n\times 1} = \vec{x}_{n\times 1}$

$I_{n\times n}A_{n\times m} = A_{n\times m}$ ⚠ Dimensions

3) $A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$

$$\underbrace{(A^{-1}A)}\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\underbrace{I \cdot \vec{x}}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \qquad \text{Si } A^{-1} \text{ existe?}$$

Parallèle avec la multiplication scalaire classique

$$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a} = a^{-1} \cdot b \qquad ⚠\ a \neq 0$$

Critères pour l'existence de l'inverse d'une matrice A : A^{-1} existe si

Nécessaire mais PAS suffisant :

1. La matrice est carrée,
2. La matrice transposée A^T est inversible

$(A^T)_{ij} = a_{ji}$

$A = \begin{pmatrix} | & | & | & | \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} — \\ — \\ — \end{pmatrix}$

⚠ $A^T \neq A^{-1}$

Conditions SUFFISANTES et EQUIVALENTS (si une est vraie, elles le sont toutes)

3.1 La famille des vecteurs COLONNE de A = $[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_2, \ldots]$

3.1 La famille des vecteurs COLONNE de A $= [\vec{a}_1 \; \vec{a}_2 \; \vec{a}_3, \ldots]$
est une famille LIBRE
La seule solution à l'équation $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$

est $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$!

3.2 La famille des vecteurs LIGNE de A est une famille libre

3.1 et 3.2 s'appellent aussi des matrices de rang plein.

3.3 Les équations $A\vec{x} = \vec{0}$ n'ont qu'une seule solution, à savoir $\vec{x} = \vec{0}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\text{PAS inversible !}} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.4 Le ***déterminant*** de la matrice A ne doit pas être 0 !!!

Déterminant d'une matrice est un SCALAIRE, qui se calcule de manière RECURSIVE.

Tout se base sur calcul d'une matrice 2x2

$$\det(A_{2\times 2}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -5 \neq 0 \Rightarrow A \text{ inversible !}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix} = 1\cdot 2 - 1\cdot 2 = 0 \Rightarrow A \text{ PAS inversible!}$$

$\underline{A_{3\times 3}:}$

$$\det\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}+ & - & +\end{array}\\ \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\end{array} = a_{11}\cdot\det\begin{pmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{pmatrix}$$
$$+\, a_{13}\det\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$$

Calcul $A_{2\times 2} \Rightarrow 1$ cal $|\ |_{2\times 2}$

$A_{3\times 3} \Rightarrow 3$ cal $|\ |_{2\times 2}$

$A_{4\times 4}$?

$$\det\begin{array}{cc}\begin{array}{ccc}+ & - & +\end{array} & \\ \begin{pmatrix}3&0&2\\1&1&3\\5&0&1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}+\\-\\+\end{array}\end{array} = -0\cdot\det(?) + 1\cdot\det\begin{pmatrix}3&2\\5&1\end{pmatrix} - 0\cdot\det(?)$$
$$= 1\cdot(3\cdot 1 - 2\cdot 5) = \underline{\underline{-7}}$$

$$= 3\underbrace{\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}}_{3} - \underbrace{0\cdot\det\begin{pmatrix}1&3\\5&1\end{pmatrix}}_{0} + 2\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\5&0\end{pmatrix}}_{-10} = \underline{\underline{-7}}$$

$$\det(A_{4\times 4}) = \det\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}+ & - & + & -\end{array}\\ \begin{pmatrix}a&b&c&d\\e&f&g&h\\i&j&k&l\\m&n&o&p\end{pmatrix}\end{array} = a\cdot\det\begin{pmatrix}f&g&h\\j&k&l\\n&o&p\end{pmatrix}_{3\times 3} - b\det\begin{pmatrix}e&g&h\\i&k&l\\m&o&p\end{pmatrix}_{3\times 3} + c\det(..) - d\cdot\det..$$

$\Downarrow$

$$f \det\begin{pmatrix} kl \\ op \end{pmatrix} - g \det\begin{pmatrix} jl \\ np \end{pmatrix} + h \dots$$

$$\det A_{4\times4} \Rightarrow 4 \times \det A_{3\times3} \Rightarrow 4 \times \left(3 \times \det A_{2\times2}\right) = 12 \times |\ \ |_{2\times2}$$

$$5\times5 \Rightarrow 5 \times |\ \ |_{4\times4} = 60\ |\ \ |_{2\times2}$$

$$A_{n\times n} \Rightarrow \frac{n!}{2}\ |\ \ |_{2\times2} \qquad O(n!) \quad \text{Pire que } O(2^n)$$

TRÈS DUR !!!

Il existe d'autres manières pour calculer le déterminant $O(n^2)$.

Résoudre $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\text{Si } A_{2\times2} \Rightarrow A^{-1} : A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\underset{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{\det(A)}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times2}$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} x_1 = b_1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \Rightarrow x_2 = \square \\ \vdots \end{cases}$$

On ***dépouille*** le résultat ligne par ligne, en remplaçant les valeurs d'une variable dans toutes les lignes suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} \diagdown & \\ 0 & \end{pmatrix} \Rightarrow \text{comment résoudre } A\vec{x} = \vec{b}$$

dépouillement à partir de la dernière ligne !

Théorème :
Pour toute matrice A inversible, il existe une FACTORISATION L-U en deux matrices triangulaires INFERIEURE L ("lower"), et triangulaire SUPERIEURE U (upper) telles que

$$A = L \cdot U = \underbrace{\begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ & \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} & \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}}_{U}$$

Cela nous permet de résoudre un système d'équations par 2 "dépouillements" successifs :

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow (LU)\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow L\underbrace{(U\vec{x})}_{\vec{y}} = \vec{b}$$

① Résoudre dépouillement $L\vec{y} = \vec{b}$ (facile)

x_1, x_2

② Résoudre dépouillement (inversé) $U\vec{x} = \vec{y}$

x_{n-1}, x_n

Le résultat de ② est le $\vec{x}$ cherché !

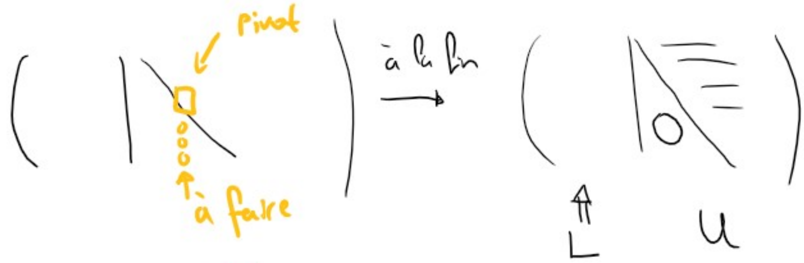
Pivot de Gauss :
Données : Matrice carrée A $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Résultat : deux matrice carrées L et U telles que A = L×U

① Accoler une matrice Identité à GAUCHE de A

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&1&-1\\ 0&1&0&1&-2&-2\\ 0&0&1&-3&2&2\end{array}\right)$$

② Pour CHAQUE ligne, sélectionner le "pivot" sur la diagonale, et "éliminer" les valeurs dans la colonne du pivot et les lignes en-dessous du pivot

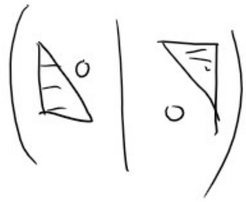


1^{er} pivot a_{11}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&1&-1\\ 0&1&0&1&-2&-2\\ 0&0&1&-3&2&2\end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \ell_2 - \ell_1 \\ \leftarrow \ell_3 + 3\ell_1 \end{array} \xrightarrow{\times -1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&1&-1\\ +1&1&0&0&-3&-1\\ -3&0&1&0&5&-1\end{array}\right)$$

2^{e} pivot a_{22}

$$\begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&1&-1\\ 1&1&0&0&-3&-1\\ -3&0&1&0&5&-1\end{array}\right) \end{array} \quad \ell_3 + \frac{5}{3}\ell_2 \xrightarrow{\times -1} \begin{array}{c} L \qquad\qquad U \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&1&-1\\ 1&1&0&0&-3&-1\\ -3&-\frac{5}{3}&0&0&0&-\frac{8}{3}\end{array}\right) \end{array} =$$



FIN

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 1&1&0\\ -3&\frac{5}{3}&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&1&-1\\ 0&-3&-1\\ 0&0&-\frac{8}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&-1\\ 1&-2&-2\\ -3&2&2\end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{①} \ A = L \times U$$

② Résoudre $L\vec{y} = \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ \underset{\underset{1}{\shortparallel}}{y_1} + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 0 \\ -3 \cdot 1 - \frac{5}{3} y_2 + y_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 4 \end{cases}$$

$$U\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$